Test pour l'entrée en classe préparatoire MPSI

Session 2011

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les huit exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. La difficulté est plus ou moins croissante. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Trouver x dans $\mathbb{R}$ tel que $\cos x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

2. Soit x un nombre réel tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\quad 1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$.
   (b) Soit A un entier vérifiant $0 \leqslant A \leqslant (n+1)! - 1$. Montrer qu'on peut trouver des entiers $a_1, ..., a_n$ vérifiant $0 \leqslant a_k \leqslant k$ pour tout k et tels que $A = a_1.1! + \cdots + a_n.n!$.
   (c) Prouver que cette écriture est unique.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n$ des nombres réels non nuls tels que $(n-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$.
   Montrer que tous les x_i ont le même signe.

5. Soient ABC un triangle, $a = BC, b = CA, c = AB$, α, β, γ les angles respectifs aux sommets A, B, C et S l'aire de ABC.
   (a) Exprimer a^2 en fonction de $(b-c)^2$, S et $\tan(\alpha/2)$.
   (b) Montrer l'inégalité suivante : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

6. Soit $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}$ trois vecteurs unitaires du plan qui ne sont pas tous les trois dans un même demi-plan. Montrer que $\|\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}\| \leqslant 1$.

7. On se donne un parallélogramme $ABCD$ du plan $\mathcal{P}$. Montrer qu'il existe A', B', C', D' dans l'espace tels que $A'B'C'D'$ soit un carré (A', B', C', D' sont coplanaires) et que A' (resp. B', C', D') soit la projection orthogonale de A (resp. B, C, D) sur $\mathcal{P}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'égalité
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k} = 2^n.$$

Entrance exam for admission in MPSI preparatory class

2011 Session

Allowed time : 4 hours

The following eight problems are mutually independent, covering various topics and can be treated in any order. Difficulty is more or less increasing. Calculators are not allowed. Your answers shall be written either in French or English.

1. Find x in $\mathbb{R}$ such that $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

2. Let x be a nonzero real number, such that $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Prove that $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ for every $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Prove that for every $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
   (b) Let A be an integer such that $0 \leqslant A \leqslant (n+1)! - 1$. Prove that one can find integers $a_1, \ldots, a_n$ satisfying $0 \leqslant a_k \leqslant k$ for every k, and such that $A = a_1 \cdot 1! + \cdots + a_n \cdot n!$.
   (c) Prove that this decomposition is unique.

4. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $x_1, \ldots, x_n$ be nonzero real numbers, such that $(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$.
   Prove that $x_1, \ldots, x_n$ all have the same sign.

5. Let ABC be a triangle, $a = BC$, $b = CA$ and $c = AB$. Denote by α, β and γ the angles at each respective vertex A, B and C. Finally, let S be the surface area of ABC.
   (a) Find an expression for a^2, in terms of $(b-c)^2$, S and $\tan(\alpha/2)$.
   (b) Prove that the following inequality holds :
   $$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\, S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

6. Let $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{x_3}$ be unitary vectors in the plane, and assume they are not all three in the same half-plane. Prove that $\|\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}\| \leqslant 1$.

7. Let ABCD be a parallelogram in the plane $\mathcal{P}$. Prove that we can find A', B', C', D' in 3-dimensional space such that $A'B'C'D'$ is a square (and therefore A', B', C', D' sit in a single plane), and such that A (respectively B, C, D) is the orthogonal projection of A' (respectively B', C', D') on $\mathcal{P}$.

8. Let $n \in \mathbb{N}$. Prove that
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k} = 2^n$$