Test pour l'entrée en Classe Préparatoire aux Grandes Écoles

Session 2012

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les onze exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. La difficulté est plus ou moins croissante. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Déterminer les entiers $n \geqslant 2$ qui ont un nombre impair de diviseurs.

2. Trouver les réels y tels qu'existe au moins un réel x vérifiant :
$$y = (1 + \sin x)\,(1 + \cos x).$$

3. Soient ABC un triangle, on note $a = BC, b = CA, c = AB$, m_a (resp. m_b, m_c) la longueur de la médiane issue de A (resp. B, C), S l'aire du triangle ABC. Montrer que :
$$a^2 m_a^2 + b^2 m_b^2 + c^2 m_c^2 \geqslant 12 S^2.$$

4. Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$.

5. Soit ABC un triangle. On note a, b, c les longueurs des côtés respectifs BC, CA et AB. Montrer que les médianes issues de A et B sont perpendiculaires si et seulement si $a^2 + b^2 = 5\,c^2$.

6. Soient S une sphère de rayon 1 de l'espace de dimension 3 et un entier $n \geqslant 2$. Quelle est la valeur maximale de
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} M_i M_j^{\,2}$$
pour $M_1, \ldots, M_n$ dans S ?

7. Soit un entier $n \geqslant 2$. Quel est le maximum de la somme
$$\sum_{k=1}^{n} k\,\sigma(k)$$
lorsque σ décrit toutes les bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$?

8. Soient n un entier $\geqslant 2$, a et b dans $\mathbb{Z}$ distincts tels que :
$$n \mid (a^n - b^n).$$
Montrer :
$$n \mid \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

9. Soient a un entier naturel impair et b un entier strictement positif. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = b$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est un entier pair} \\ a + u_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrer qu'on peut trouver un entier naturel n tel que $u_n \leqslant a$.

   (b) Démontrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang.

10. La suite de Fibonacci est définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

   (a) Vérifier :
$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*, \qquad F_{n+k} = F_k\, F_{n+1} + F_{k-1}\, F_n.$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

   (c) Montrer, si $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n.$$

   (d) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer les n de $\mathbb{N}$ tels que :

$${F_m}^2 \mid F_n.$$

11. Soit un entier $n \geqslant 1$. Si $A = (a_1, \ldots, a_n)$ est un n-uplet de réels et m un élément de $\{1, \ldots, n\}$, on pose :
$$S_m(A) = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

   Soient $x_1, \ldots, x_n$ des entiers relatifs dont la somme vaut 1. On note :

$$X^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

   et, pour $2 \leqslant k \leqslant n$:
$$X^k = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

   Montrer qu'il existe un et un seul k de $\{1, \ldots, n\}$ tel que :

$$\forall m \in \{1, \ldots, n\}, \qquad S_m(X^k) > 0.$$

Entrance examination for admission in Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

2012 Session

Duration : 4 hours

The following eleven problems are mutually independent, covering various topics and can be treated in any order. Difficulty is more or less increasing. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or English.

1. Find all integers $n \geqslant 2$ that have an odd number of divisors.

2. Find all real numbers y so that there exists at least one real number x, such that

$$y = (1 + \sin x)\,(1 + \cos x).$$

3. Let ABC be a triangle. Denote $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, as well as m_a (respectively m_b, m_c) the length of the median coming out from A (respectively B, C), and S the area of the triangle ABC. Prove that

$$a^2 m_a^2 + b^2 m_b^2 + c^2 m_c^2 \geqslant 12 S^2.$$

4. Find all functions $f : [0, 1] \to [0, 1]$ satisfying $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ for all $(x, y) \in [0, 1]^2$.

5. Let ABC be a triangle. Denote by a, b and c the respective lengths of the sides BC, CA and AB. Prove that the medians coming out from A and B are perpendicular if, and only if, $a^2 + b^2 = 5\,c^2$.

6. Let S be a radius 1 sphere in 3-dimensional space, and n a positive integer. What is the maximum value for

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} M_i M_j{}^2$$

when $M_1, \ldots, M_n$ are in S ?

7. Let $n \geqslant 2$ be an integer. What is the maximal value for the sum

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\sigma(k)$$

when σ goes through all possible bijections of $\{1, 2, \ldots, n\}$ onto $\{1, 2, \ldots, n\}$?

8. Let $n \geqslant 2$ be an integer, a and b be distinct in $\mathbb{Z}$, such that

$$n \mid (a^n - b^n).$$

Prove that

$$n \mid \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

9. Let $a \in \mathbb{N}$ be odd, and $b \in \mathbb{N}^*$. Define by induction the sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ by $u_0 = b$ and for all nonnegative integer n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{if } u_n \text{ is an even integer} \\ a + u_n & \text{otherwise.} \end{cases}$$

   (a) Show that we can find a nonnegative integer n such that $u_n \leqslant a$.
   (b) Prove that the sequence is periodic after a certain time.

10. The Fibonacci sequence is define by

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

   (a) Check that

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*, \qquad F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n.$$

   (b) Prove that for every $n \in \mathbb{N}^*$, the terms F_n and F_{n+1} are relatively prime.
   (c) Show that if $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad F_m \mid F_n.$$

   (d) Let $m \in \mathbb{N}^*$. Find all $n \in \mathbb{N}$ such that

$${F_m}^2 \mid F_n.$$

11. Let $n \geqslant 1$ be an integer. If $A = (a_1, \ldots, a_n)$ is an n-tuple of real numbers and m is in $\{1, \ldots, n\}$, define :

$$S_m(A) = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Let $x_1, \ldots, x_n$ be integers with sum 1. Define

$$X^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

and for $2 \leqslant k \leqslant n$:

$$X^k = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Prove there exists a unique k in $\{1, \ldots, n\}$ such that :

$$\forall m \in \{1, \ldots, n\}, \qquad S_m(X^k) > 0.$$