Test pour l'entrée en Classe Préparatoire aux Grandes Écoles

Session 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les onze exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. La difficulté est plus ou moins croissante. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

2. Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}.$

3. Soient n dans $\mathbf{N}^*$, $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ des réels de valeur absolue $\leqslant 1$. Montrer que :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} u_i - \prod_{i=1}^{n} v_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|.$$

4. Déterminer tous les triplets d'entiers (a, b, c) avec a, b, c dans $\mathbf{N}^*$ tels que $a + b + c$ soit divisible par a, b et c.

5. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et f la fonction définie sur l'intervalle $[n, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x-n} + \sqrt{x-n+1} + \cdots + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \cdots \sqrt{x+n} - (2n+1)\sqrt{x}.$$

Montrer que f est croissante sur $[n, +\infty[$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

6. Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est toujours un entier impair.

7. Soient P une probabilité sur un ensemble Ω, A et B deux parties de Ω. Montrer que :

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

8. On note E l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles.
   (a) Donner un cercle passant par deux points de E mais dont le centre n'est pas dans E.
   (b) Montrer que si un cercle passe par trois points de E alors son centre est forcément dans E.

9. Soient n dans $\mathbf{N}^*$, $M_0, \ldots, M_n$ des points du plan. Montrer qu'il existe un point M du plan tel que :
$$MM_0 \leqslant \sqrt{n}\ ; \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad MM_i \geqslant 1.$$

10. Soient f et g deux applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que :
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(x) - f(y) = (x - y)\, g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$
Montrer que f est un polynôme du second degré.

11. Soient m et n dans $\mathbf{N}^*$, Ω l'ensemble des applications
$$f\ : \{1, \ldots, m\} \longmapsto \{1, \ldots, n\}.$$
Déterminer :
$$\sum_{f \in \Omega} |f(\{1, \ldots, m\})|,$$
où on a noté $|f(\{1, \ldots, m\})|$ le cardinal de l'ensemble $f(\{1, \ldots, m\})$.

Entrance examination for admission in
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

2014 Session

Duration : 4 hours

The following eleven problems are mutually independent, covering various topics and can be treated in any order. Difficulty is more or less increasing. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or English.

1. Prove that : $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

2. Prove that : $$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}.$$

3. Let n in $\mathbf{N}^*$, $u_1, \ldots, u_n$ and $v_1, \ldots, v_n$ be real numbers with absolute value less than or equal to 1. Prove that

$$\left|\prod_{i=1}^{n} u_i - \prod_{i=1}^{n} v_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|.$$

4. Find all integer triples (a, b, c), with a, b, c in $\mathbf{N}^*$, such that $a + b + c$ is an integer multiple of a, b and c.

5. Let $n \in \mathbf{N}^*$ and f be the map defined on $[n\,;+\infty[$ as :

$$f(x) = \sqrt{x-n} + \sqrt{x-n+1} + \cdots + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \cdots \sqrt{x+n} - (2n+1)\sqrt{x}.$$

Prove that f is nondecreasing in $[n\,;+\infty[$ and that $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6. Prove that for all $n \in \mathbf{N}^*$, the integer part of $(2+\sqrt{3})^n$ is an odd integer.

7. Let P be a probability over Ω. Let A and B be two subsets of Ω. Prove that

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

8. Let E be the subset of points in the plane with coordinates in $\mathbf{Q}$.

   (a) Find a circle through two points of E, but whose center is not in E.

   (b) Prove that, if a circle contains three points of E, then its center also lies in E.

9. Let $n \in \mathbf{N}^*$ and $M_0, \ldots, M_n$ be points in the plane. Prove that there exists a point M in the plane, such that

$$MM_0 \leqslant \sqrt{n}\,; \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad MM_i \geqslant 1.$$

10. Let f and g be maps from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}$ such that :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(x) - f(y) = (x-y)\, g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

   Prove that f is a degree 2 polynomial.

11. Let m and n in $\mathbf{N}^*$, let Ω be the collection of all maps

$$f\ : \{1, \ldots, m\} \longmapsto \{1, \ldots, n\}.$$

   Compute

$$\sum_{f \in \Omega} |f(\{1, \ldots, m\})|,$$

   where $|f(\{1, \ldots, m\})|$ denotes the cardinality of the set $f(\{1, \ldots, m\})$.
