Test pour l'entrée en Classe Préparatoire aux Grandes Écoles

Session 2015

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les neuf exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. La difficulté est plus ou moins croissante. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs, σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Démontrer
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{\sigma(i)}} \geqslant n.$$

2. Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles qui se coupent en deux points A et B. Soit Δ une droite tangente aux deux cercles en M et N. Montrer que la droite (AB) coupe le segment $[MN]$ en son milieu.

3. Montrer que pour tout réel x on a $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

4. Trouver les entiers n de trois chiffres tels que l'écriture décimale de n^2 se termine par n.

5. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont supérieurs ou égaux à $2u_n$. Montrer que u_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

6. (a) Exhiber une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $y \in \mathbf{R}$ l'équation $f(x) = y$ admet exactement trois solutions.
   (b) Est-il possible de trouver une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $y \in \mathbf{R}$ l'équation $f(x) = y$ ait exactement deux solutions ?

7. On lance une pièce équilibrée n fois et on note F le nombre de « faces » et P le nombre de « piles ».
   (a) Montrer que l'espérance (c'est à dire la moyenne) de l'écart $|F - P|$ est égale à
   $$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k<n/2} (n-2k) \binom{n}{k},$$
   où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désigne le coefficient binomial.
   (b) Simplifier cette somme lorsque $n = 2p$ est pair.

8. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ croissantes et telles que

$$\forall (k,m) \in \mathbf{N}^{*2}, \qquad f(m^k) = f(m)^k.$$

9. Soient Γ un cercle de centre O et $A_1, \ldots, A_n$ des points de Γ. Quelle est la probabilité que O appartienne à l'enveloppe convexe de $A_1, \ldots, A_n$?

Entrance examination for admission in Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

2015 Session

Duration : 4 hours

The following nine problems are mutually independent, covering various topics and can be treated in any order. Difficulty is more or less increasing. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or English.

1. Let $a_1, \ldots, a_n$ be (strictly) positive real numbers, σ a permutation of $\{1, \ldots, n\}$. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{\sigma(i)}} \geqslant n.$$

2. Let $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ be two circles, that intersect at two points A and B. Let Δ be a straight line, tangent to both circles respectively at two points M and N. Prove that the line (AB) intersects the line segment $[MN]$ at its midpoint.

3. Prove that the inequality $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ holds for every real number x.

4. Find all three-digit integers n such that, the decimal expansion for n^2 terminates with n.

5. Let $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a sequence of non-negative real numbers such that $u_0 = 1$. Assume moreover that, for every integer $n \geqslant 1$, at least half of the terms $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ are bigger than or equal to $2u_n$. Prove that $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converges to 0.

6. (a) Find a continuous function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ such that, for every $y \in \mathbf{R}$, the equation $f(x) = y$ has exactly three solutions.

   (b) Is it possible to find a continuous function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ such that, for every $y \in \mathbf{R}$, the equation $f(x) = y$ has exactly two solutions ?

7. A balanced coin is tossed n times, and we let F be the number of « heads, » and P the number of « tails » obtained.

   (a) Prove that the expectation (*i.e.* the average) of the difference $|F - P|$ equals

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k<n/2} (n-2k) \binom{n}{k},$$

   where $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ is the usual binomial coefficient.

   (b) Find a simple expression for the value of this sum whenever $n = 2p$ is an even number.

8. Find all non-decreasing functions f from $\mathbf{N}^*$ into $\mathbf{R}^{+*}$ such that

$$\forall (k,m) \in \mathbf{N}^{*2}, \qquad f(m^k) = f(m)^k$$

9. Let Γ be a circle with center O, and $A_1, \ldots, A_n$ be points on Γ. What is the probability that O belongs to the convex hull of $A_1, \ldots, A_n$?