Test pour l'entrée en Classe Préparatoire aux Grandes Écoles

Session 2016

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les dix exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. La difficulté est plus ou moins croissante. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Trouver les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ et $f(x) \leqslant x$, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2. Trouver tous les réels x tels que $3^x + 4^x = 5^x$.

3. Pour a dans $\mathbf{R}^{+*}$, soit A_a l'ensemble
$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a^i \ ; \ n \geqslant 0, (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^{n+1} \right\}.$$
   (a) Pour quelles valeurs de a l'ensemble A_a est-il majoré ?
   (b) On suppose $a \geqslant 2$. Montrer que $A_a \cap]-1, 1[= \emptyset$.

4. Soit N_n le nombre d'entiers k de $\{1, \ldots, n\}$ tels que l'écriture de 2^k en base 10 se termine par 12. Déterminer la limite de N_n/n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour $k \in \mathbf{N}^*$ que vaut $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{k-1} \mathrm{d}t$? En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

6. On place 100 points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe une droite du plan telle qu'il y ait exactement 50 points de chaque côté de la droite.

7. On écrit sur une ligne les entiers entre 0 et n ($n \geqslant 1$). Comme dans le triangle de PASCAL, on écrit sur une seconde ligne les sommes de deux entiers consécutifs de la ligne 1. On fait de même pour construire la troisième ligne,... jusqu'à n'obtenir qu'un seul entier. Quelle est la valeur de cet entier ?

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & \cdots & & n-1 & & n \\
& 1 & & 3 & & 5 & & \cdots & & & 2n-1 & \\
& & 4 & & 8 & & \cdots & \cdots & & & & \\
& & & \ddots & & & \vdots & & & & & \\
& & & & & & ? & & & & &
\end{array}$$

8. Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle dont le périmètre vaut 1. Montrer que

$$\frac{13}{27} \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \leqslant \frac{1}{2}.$$

9. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, soient D_n l'ensemble des diviseurs de n, $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Démontrer

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \sum_{k \in D_n} d(k)^3 = \left(\sum_{k \in D_n} d(k) \right)^2.$$

10. On lance une infinité de fois un dé à 6 faces numérotées $1, 2, \ldots, 6$, non pipé. On note $X_k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, le résultat du k-ième lancer. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

la somme des résultats des n premiers lancers. Pour s dans $\mathbf{N}^*$, soit p_s la probabilité pour qu'il existe n tel que $S_n = s$.

Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de p_s lorsque s décrit $\mathbf{N}^*$.

Entrance examination for admission in
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

2016 Session

Duration : 4 hours

The following ten problems are mutually independent, covering various topics and can be treated in any order. Difficulty is more or less increasing. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or English.

1. Find all functions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ such that $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ and $f(x) \leqslant x$ for all $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

2. Find all real numbers x such that $3^x + 4^x = 5^x$.

3. Given an $a \in \mathbf{R}^{+*}$, let A_a be the set

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a^i \; ; \; n \geqslant 0, (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^{n+1} \right\}.$$

   (a) For what values of a is the set A_a bounded above ?
   (b) Assume $a \geqslant 2$. Prove that $A_a \cap]-1\,;1[= \emptyset$.

4. Let N_n be the number of integers $k \in \{1, \ldots, n\}$ such that the decimal expansion of 2^k terminates with 12. Find the limit of N_n/n as n goes to infinity.

5. Given a $k \in \mathbf{N}^*$, compute $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^k \,\mathrm{d}t$. Use this computation to deduce that, for every $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

6. Consider 100 points in the plane, pairwise distinct. Prove that we can find a straight line that separates the plane in two half-planes, such that each half plane contains exactly 50 points.

7. On a line, write down in increasing order all integers between 0 and n (where $n \geqslant 1$). In a similar way as the construction of the binomial numbers' triangle, write on the second line all the sums of consecutive integers from the first line. Keep going with the third line,... until there is only one integer left (see picture on the next page). What is this last integer ?

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & \cdots & n-1 & & n \\
 & 1 & & 3 & & 5 & & \cdots & & 2n-1 & \\
 & & 4 & & 8 & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & \ddots & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & ? & & & &
\end{array}
$$

8. Let a, b, c be the lengths of the three sides of a triangle with perimeter 1. Prove that

$$\frac{13}{27} \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \leqslant \frac{1}{2}.$$

9. Given n in $\mathbf{N}^*$, let D_n be the set of divisors of n, and $d(n)$ be the number of said divisors of n. Prove that

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \sum_{k \in D_n} d(k)^3 = \left(\sum_{k \in D_n} d(k) \right)^2.$$

10. We throw infinitely many times a balanced dice with numbers 1 to 6. Let $X_k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ be the outcome of the k-th throw. For a given n in $\mathbf{N}^*$, let

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

be the sum of the outcomes of the n first throws. For s in $\mathbf{N}^*$, let p_s be the probability there exists n such that $S_n = s$.

Find the minimal value and maximal value of p_s when s assumes all possible values in $\mathbf{N}^*$.
