Test pour l'entrée en Classe Préparatoire aux Grandes Écoles

Session 2017

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les dix exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. La difficulté est plus ou moins croissante. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Déterminer les nombres entiers $n \geqslant 1$ tels que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ (partie entière de $\sqrt{n}$) divise n.

2. a) Soient A, B, C trois points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que
$$AC^2 - AM^2 = BC^2 - BM^2.$$
b) Soient A, B, C trois points distincts du plan, P, Q, R trois points du plan. On note D_1 la droite passant par P et perpendiculaire à BC, D_2 la droite passant par Q et perpendiculaire à CA, D_3 la droite passant par R et perpendiculaire à AB. Montrer que D_1, D_2, D_3 sont concourantes si et seulement si
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0.$$

3. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbf{R}^+$, $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Montrer
$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}.$$

4. Déterminer les fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leqslant x$ et
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

5. Soient ABC un triangle, α, β, γ les angles aux sommets respectifs A, B, C. Montrer
$$\cos(\alpha)\ \cos(\beta)\ cos(\gamma) \leqslant \frac{1}{8}.$$

6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que l'entier n n'est divisible ni par 2 ni par 5. Montrer que, dans l'écriture décimale de n^{20}, le chiffre des centaines est pair, le chiffre des dizaines est 0 et le chiffre des unités est 1.

7. Soit α dans $]0,1[$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout (x,y) de $[0,1]^2$, on ait
$$y \geqslant x \Longrightarrow f(y) - f(x) \geqslant (y-x)^{\alpha}.$$

8. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues sur $\mathbf{R}$, non identiquement nulles et telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)\, f(y).$$

9. On note $|X|$ le nombre d'éléments (ou cardinal) d'un ensemble fini X. Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties finies d'un ensemble E. Pour x dans E, soit $d(x)$ le nombre d'indice i de $\{1, \dots, n\}$ tels que $x \in A_i$.

   a) Montrer
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in A_i} \frac{1}{d(x)}.$$

   b) En déduire
$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|A_i|^2}{\sum_{j=1}^{n} |A_i \cap A_j|}.$$

10. Soient E un ensemble fini, $n \geqslant 2$ un entier, $A_1, \dots, A_n$ et $B_1, \dots, B_n$ des parties de E. On suppose que, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $A_i \cap B_i = \emptyset$ et que, si i et j sont des éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$. Pour p dans $[0,1]$, démontrer
$$\sum_{i=1}^{n} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leqslant 1.$$

    [On pourra introduire des variables aléatoires de Bernoulli.]

Entrance examination for admission in Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

2017 Session

Duration : 4 hours

The following ten problems are mutually independent, covering various topics and can be treated in any order. Difficulty is more or less increasing. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or English.

1. Find all integers $n \geqslant 1$ such that $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ (the integer part of $\sqrt{n}$) divides n.

2. (a) Let A, B, C be three pairwise distinct points in the plane. Find the set of all points M in the plane, such that
$$AC^2 - AM^2 = BC^2 - BM^2.$$
(b) Let A, B, C be three pairwise distinct points in the plane; let P, Q, R be three points in the plane. We let D_1 be the straight line perpendicular to BC passing through P; D_2 is the line perpendicular to CA passing through Q; D_3 is the straight line perpendicular to AB passing through R. Prove that D_1, D_2, D_3 all intersect at a single point if, and only if,
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0.$$

3. Let $n \in \mathbf{N}^*$; let $a_1, \ldots, a_n$ be elements of $\mathbf{R}^+$, $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Prove that
$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}.$$

4. Find all functions f from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}$ such that $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leqslant x$ and
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(x + y) \leqslant f(x) + f(y).$$

5. Let ABC be a triangle; let α, β, γ be the internal angles respectively at vertices A, B, C. Prove
$$\cos(\alpha)\ \cos(\beta)\ \cos(\gamma) \leqslant \frac{1}{8}.$$

6. Let $n \in \mathbf{N}^*$. Assume that n is not divisible by 2 nor 5. Prove that, in the decimal expansion of n^{20}, the hundreds digit is even, the tens digit is 0 and the ones digit is 1.

7. Let α in $]0,1[$. Prove that there is no function f from $[0,1]$ into $\mathbf{R}$ such that, for every (x,y) in $[0,1]^2$, we have

$$y \geqslant x \Longrightarrow f(y) - f(x) \geqslant (y-x)^\alpha.$$

8. Find the set of all functions f from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}$, everywhere continuous and not identically zero, such that

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)\,f(y).$$

9. We denote by $|X|$ the number of elements (or cardinality) of a finite set X. Let $A_1, \dots, A_n$ be finite subsets of a set E. For an x in E, denote by $d(x)$ the number of indices $i \in \{1, \dots, n\}$ such that $x \in A_i$.

   (a) Prove that

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in A_i} \frac{1}{d(x)}.$$

   (b) Then deduce that

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|A_i|^2}{\sum_{j=1}^{n} |A_i \cap A_j|}.$$

10. Let E be a finite set, $n \geqslant 2$ be an integer; let $A_1, \dots, A_n$ and $B_1, \dots, B_n$ be subsets of E. Assume that for every i in $1, \dots, n$, $A_i \cap B_i = \emptyset$ and that if i and j are distinct elements of $\{1, \dots, n\}$, then $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$. Given a p in $[0,1]$, prove that

$$\sum_{i=1}^{n} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leqslant 1.$$

    [One could introduce Bernoulli-type random variables.]