Test pour l'entrée en classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE)

Session 2018

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les dix exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. La difficulté est plus ou moins croissante. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Déterminer les réels a de $\mathbf{R}^{+*}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad a^x \geqslant x+1.$$

2. Déterminer le minimum de

$$f(x,y,z) = x^2 + xy^2 + xyz^2 - 4xyz$$

pour x, y, z dans $\mathbf{R}^+$.

3. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Pour $x \in \mathbf{R}$, soit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k.$$

Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(x+k).$$

4. La suite $(L_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $L_0 = 2, L_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Si p est un nombre premier, déterminer le reste de la division euclidienne de L_p par p.

5. Soit f une fonction du plan $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout quadruplet (A, B, C, D) de points distincts de $\mathbf{R}^2$ formant un carré, on ait

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0.$$

Montrer que f est identiquement nulle.

6. Soit f une fonction de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad f(f(x)) = x^4.$$

a) Calculer $f(1)$.

b) On suppose que f est dérivable en 1. Déterminer f.

7. Soient $\mathcal{S}$ la sphère de l'espace de centre O et de rayon r. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{S}$, H leur orthocentre (l'intersection des trois hauteurs du triangle ABC). Montrer que

$$OH < 3r.$$

8. Soient m et n dans $\mathbf{N}^*$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ tels que, si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ vérifie $a_i + a_j \leqslant n$, alors il existe k dans $\{1, \ldots, m\}$ tel que

$$a_i + a_j = a_k.$$

Montrer

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

9. On se donne un entier $n \geqslant 2$ et on considère le carré C, ensemble des points $M = (x, y)$ avec x et y dans $\{1, \ldots, n\}$. On colorie les points de C en blanc ou en noir avec probabilité $\frac{1}{2}$, de manière indépendante. Deux points $M = (x, y)$ et $M' = (x', y')$ de C sont dits adjacents si $|x - x'| + |y - y'| = 1$.
Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de points M de C tel qu'aucun point adjacent à M ne soit de la même couleur que M. Calculer l'espérance $E(N)$ de N.

10. Déterminer les entiers $a \in \mathbf{N}^*$ tels qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que

$$a^{n-1} \equiv -1 \ [n].$$

Entrance examination for admission in
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

2018 Session

Duration : 4 hours

The following ten problems are mutually independent, covering various topics and can be treated in any order. Difficulty is more or less increasing. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or English.

1. Determine all real numbers a in $\mathbf{R}^{+*}$ such that

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad a^x \geqslant x + 1.$$

2. Compute the minimum of

$$f(x, y, z) = x^2 + xy^2 + xyz^2 - 4xyz.$$

whenever x, y, z are in $\mathbf{R}^+$.

3. Let $n \in \mathbf{N}^*$ and $a_0, \ldots, a_n$ be real numbers. For any $x \in \mathbf{R}$, define

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k.$$

Whenever $x \in \mathbf{R}$, compute

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(x+k).$$

4. Let the sequence $(L_n)_{n \geqslant 0}$ be defined by $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ and

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

a) Prove that

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Whenever p is a prime number, find the remainder of the euclidean division of L_p by p.

5. Let f be a function defined on the plane $\mathbf{R}^2$, with values in $\mathbf{R}$, such that, whenever four pairwise distinct points (A, B, C, D) form a square, we have
$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0.$$
Show that f is identically zero.

6. Let f be a function defined on $\mathbf{R}^{+*}$, with values in $\mathbf{R}^{+*}$, such that
$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad f(f(x)) = x^4.$$
a) Determine $f(1)$.
b) Assuming that f is differentiable at 1, compute $f(x)$ for all x in $\mathbf{R}^{+*}$.

7. Let $\mathcal{S}$ be a sphere in 3-dimensional space, with center O and radius $r > 0$. Let A, B, C be pairwise distinct points in $\mathcal{S}$, and H be their orthocenter (the intersection of the triangle's three altitudes). Prove that
$$OH < 3r.$$

8. Let m and n in $\mathbf{N}^*$. Let $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ be elements of $\{1, \dots, n\}$ such that : for all $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ such that $a_i + a_j \leqslant n$, there exists $k \in \{1, \dots, m\}$ such that $a_i + a_j = a_k$.
Show that
$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

9. Let $n \geqslant 2$ be an integer. Denote by C the square formed by all points $M = (x, y)$ with x and y in $\{1, \dots, n\}$. Points in C are colored in black or white, independently, and with even probability $\frac{1}{2}$. Define two points $M = (x, y)$ and $M' = (x', y')$ in C to be adjacent whenever they satisfy $|x - x'| + |y - y'| = 1$.
Let N be the random variable that provides the number of points M in C, such that points adjacent to M are of the opposite color to M's. Compute the expectation $E(N)$ of N.

10. Determine all integers $a \in \mathbf{N}^*$ such that, there exists an integer $n \geqslant 2$ satisfying
$$a^{n-1} = -1 \; [n].$$