Test pour l'entrée en classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE)

Session 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures

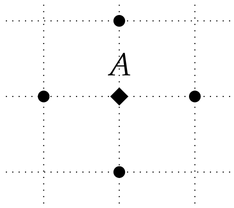
Les dix exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Déterminer les triplets (a, b, c) dans $\mathbf{N}^3$ tels que
$$a! + b! = c!.$$

2. Déterminer la valeur minimale de
$$f(x, y) = \max(3x^2 + 2y, 3y^2 + 2x)$$
pour x, y dans $\mathbf{R}$.

3. Montrer que le seul triplet (x, y, z) de $\mathbf{Z}^3$ tel que
$$5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$$
est $(0, 0, 0)$.

4. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on note $f(n)$ le nombre de chemins $(A_0, \ldots, A_n)$ de points distincts de $\mathbf{Z}^2$ tels que $A_0 = O$ (O est le point $(0, 0)$), et que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, A_{i+1} soit un des quatre sommets adjacents à A_i. Montrer que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad 4 \times 2^{n-1} \leqslant f(n) \leqslant 4 \times 3^{n-1}.$$



Les 4 points adjacents au point A.

5. Pour x dans $\mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

   Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on note u_n le nombre d'entiers de la forme
$$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$$
   avec k dans $\{1, \ldots, n\}$. Déterminer la limite de
$$\frac{u_n}{\sqrt{n}}$$
   lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Déterminer les couples (a, b) de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ tels que $2^b - 1$ divise $2^a + 1$.

7. Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit, r le rayon de ce même cercle. Établir
$$AI \times BI \times CI \geqslant 8r^3.$$

8. Soient $n \geqslant 2$ un entier, S une sphère de rayon 1 de l'espace euclidien. Montrer que, si $M_1, \ldots, M_n$ sont des points de S, alors
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} M_i M_j{}^2 \leqslant n^2$$
   et que cette inégalité est optimale.

9. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le nombre de permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$ telles que tous les nombres $|\sigma(i) - i|$, $1 \leqslant i \leqslant n$ soient égaux.

10. Soit P une probabilité sur l'ensemble fini Ω.

    a) Soient A et B deux événements. Comparer
$$P(A)\ P(B) \quad \text{et} \quad P(A \cap B)\ P(A \cup B).$$
    b) Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit C_i l'ensemble des éléments de Ω qui sont contenus dans au moins i des ensembles $A_1, \ldots, A_n$. Comparer
$$\prod_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} P(C_i).$$

Entrance examination for admission in Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

---

2019 Session

Duration : 4 hours

The following ten problems are mutually independent. They cover various topics and can be treated in any order. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or in English.

1. Find all 3-tuples (a, b, c) in $\mathbf{N}^3$ such that

$$a! + b! = c!.$$

2. Compute the minimum of

$$f(x, y) = \max(3x^2 + 2y, 3y^2 + 2x)$$

whenever x, y are in $\mathbf{R}$.

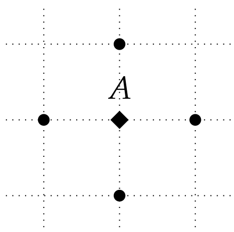
3. Prove that the only 3-tuple (x, y, z) in $\mathbf{Z}^3$ such that

$$5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$$

is $(0, 0, 0)$.

4. For n in $\mathbf{N}^*$, we denote by $f(n)$ the number of paths $(A_0, \ldots, A_n)$ of pairwise distinct points in $\mathbf{Z}^2$ such that $A_0 = O$ (O is the point $(0, 0)$), and, for all $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, A_{i+1} is one of the four points adjacent to A_i. Prove that

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad 4 \times 2^{n-1} \leqslant f(n) \leqslant 4 \times 3^{n-1}.$$



The 4 points adjacent to point A.

5. For x in $\mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x.

   For n in $\mathbf{N}^*$, we denote by u_n the number of integers of the form
$$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$$
   with k in $\{1, \ldots, n\}$. Determine the limit of
$$\frac{u_n}{\sqrt{n}}$$
   as n goes to $+\infty$.

6. Determine all 2-tuples (a, b) in $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ such that $2^b - 1$ divides $2^a + 1$.

7. Let ABC be a triangle, and I be the center of its inscribed circle, whose radius is denoted by r. Prove
$$AI \times BI \times CI \geqslant 8r^3.$$

8. Let $\mathcal{S}$ be a sphere in 3-dimensional space, with center O and radius 1. Let $n \geqslant 2$ be an integer. Prove that, if $M_1, \ldots, M_n$ are n points of S, then
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} M_i M_j{}^2 \leqslant n^2$$
   and this inequality is the best possible.

9. Let $n \in \mathbf{N}^*$. Determine the number of permutations σ of $\{1, \ldots, n\}$ such that all numbers $|\sigma(i) - i|$, $1 \leqslant i \leqslant n$ are equal.

10. Let P be a probability on a finite set Ω.

    a) Let A and B be two events. Compare
$$P(A)\ P(B) \quad \text{and} \quad P(A \cap B)\ P(A \cup B).$$
    b) For $n \in \mathbf{N}^*$, let $A_1, \ldots, A_n$ be events. For $1 \leqslant i \leqslant n$, let C_i be the set of elements of Ω that are contained in at least i subsets among $A_1, \ldots, A_n$. Compare
$$\prod_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{and} \quad \prod_{i=1}^{n} P(C_i).$$