Test pour l'entrée en classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE)

Session 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les neuf exercices ci-après sont indépendants les uns des autres, ils concernent différents thèmes et peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les solutions seront rédigées en français ou en anglais uniquement.

1. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1.$$
Montrer que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad |x_i| \leqslant \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

2. Soient $\mathcal{C}$ un cercle, P un point situé à l'intérieur de $\mathcal{C}$, Δ et Δ' deux droites passant par P et perpendiculaires. Démontrer qu'il existe un cercle, dont on précisera le centre et le rayon, qui contient le milieu du segment $[A, A']$ pour tout point A de $\Delta \cap \mathcal{C}$ et tout point A' de $\Delta' \cap \mathcal{C}$.

3. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n + n$ divise $8^n + n$.

4. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On procède à $2n$ tirages sans remise. On note L_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans l'urne au premier instant où il ne reste plus que des boules d'une seule couleur.
   (a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Calculer $P(L_n \geqslant k)$.
   (b) On fixe $k \in \mathbf{N}^*$. Quelle est la limite de $P(L_n \geqslant k)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   (c) Calculer l'espérance $E(L_n)$ de L_n.

5. (a) Trouver une équation du second degré à coefficients entiers vérifiée par $2\ \cos(\frac{2\pi}{5})$ et calculer ce nombre.
   (b) Soient Γ un cercle du plan de centre O et rayon R, A et B deux points de Γ tels que les droites (OA) et (OB) soient perpendiculaires,γ le cercle de diamètre $[OA]$. Les deux cercles de centre B tangents à γ coupent Γ respectivement en C, C' et D, D'. Montrer qu'il existe un décagone (c'est-à-dire un polygone à 10 côtés) réguliers dont les points B, C, C', D, D' sont des sommets.

6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad u_n = u_{\lfloor n/2\rfloor} + u_{\lfloor n/3\rfloor} + u_{\lfloor n/6\rfloor}.$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \geqslant n+1.$$

b) Trouver $C \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \leqslant C\ (n+1).$$

7. Trouver les fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivables sur $\mathbf{R}$ et telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |f(x)| \leqslant 2, \quad f(x)\ f'(x) \geqslant \sin(x).$$

8. (a) Montrer que

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \qquad \binom{2m}{m} \geqslant 2^m.$$

   (b) Montrer que, si $b \in \mathbf{N}^*$, $a \mapsto \dbinom{a+b}{a}$ est strictement croissante.

   (c) Soit t un entier naturel $\geqslant 2$. On définit

$$E_t = \{(m,n) \in \mathbf{N}^{*2}\ ;\ n \geqslant m \text{ et } \binom{n}{m} = t\}.$$

      i. Montrer que, pour tout entier $t \geqslant 2$, E_t est fini.

      ii. On note $N(t)$ le cardinal de E_t. Démontrer qu il existe $C \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{N},\ t \geqslant 2, \qquad N(t) \leqslant C\ \ln(t).$$

9. Soient $m \in \mathbf{N}^*$, $a_1, \ldots, a_m$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 deux à deux premiers entre eux. On note E l'ensemble des entiers k de $\mathbf{N}^*$ qui sont divisibles par exactement un des a_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

   (a) Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{|E \cap [1,n]\,|}{n}$.

   (b) On note ℓ la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{|E \cap [1,n]\,|}{n}$. Démontrer que $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$ et caractériser le cas d'égalité.

Entrance examination for admission in Classes Préparatoires aux Grandes Écoles

2020 Session

Duration : 4 hours

The following nine problems are mutually independent. They cover various topics and can be treated in any order. Calculators are not allowed. Your answers should be written either in French or in English.

1. For $n \in \mathbf{N}^*$, let $x_1, \ldots, x_n$ be real numbers such that
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1.$$
Show that
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad |x_i| \leqslant \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$
2. Let $\mathcal{C}$ be a circle, P a point in the interior of $\mathcal{C}$, Δ and Δ' two perpendicular lines intersecting in P. Show that there exists a circle passing through the middle point of segment $[A, A']$, for each point A in $\Delta \cap \mathcal{C}$ and each point A' in $\Delta' \cap \mathcal{C}$. Give the center and the radius of this circle.
3. Determine all non negative integers n such that $8^n + n$ is divisible by $2^n + n$.
4. Consider an urn that contains n white balls and n black balls. We remove at random successively the $2n$ balls. Let L_n be the random variable which is the number of balls in the urn at the first time the urn contains only balls of one color.
   (a) Let $k \in \{1, \ldots, n\}$, compute $P(L_n \geqslant k)$.
   (b) Let $k \in \mathbf{N}^*$. Determine the limit of $P(L_n \geqslant k)$ as n goes to $+\infty$?
   (c) Compute the expected value of $E(L_n)$ of L_n.
5. (a) Find a quadratic equation with integer coefficients whose one root is $2\ \cos(\frac{2\pi}{5})$ and compute this number.
   (b) Let Γ be a circle of center O and radius R. Let A and B be two points of Γ such that (OA) et (OB) are perpendicular lines intersecting in O. We denote by γ the circle with diameter $[OA]$.The two circles of center B which are tangent to γ intersect Γ respectively in C, C' and D, D'. Show there is a regular degagon (ten-sided polygon) having points B, C, C', D, D' as vertices.
6. Let $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ be the sequence defined by $u_0 = 1$ and
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}.$$

(a) Show that
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \geqslant n+1.$$

(b) Find $C \in \mathbf{R}^{+*}$ such that
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \leqslant C\ (n+1).$$

7. Find all differentiable functions f from $\mathbf{R}$ to $\mathbf{R}$ such that
$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |f(x)| \leqslant 2, \quad f(x)\ f'(x) \geqslant \sin(x).$$

8. (a) Show that
$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \qquad \binom{2m}{m} \geqslant 2^m.$$

(b) Show that , if $b \in \mathbf{N}^*$, the function $a \mapsto \binom{a+b}{a}$ is strictly increasing.

(c) Let t be an integer $\geqslant 2$. We denote by E the set :
$$E_t = \{(m,n) \in \mathbf{N}^{*2}\ ;\ n \geqslant m \text{ and } \binom{n}{m} = t\}.$$

i. Show that, for all integer $t \geqslant 2$, E_t is a finite set.

ii. We denote by $N(t)$ the cardinal of E_t. Show there exists $C \in \mathbf{R}^{+*}$ such that
$$\forall t \in \mathbf{N},\ t \geqslant 2, \qquad N(t) \leqslant C\ \ln(t).$$

9. Let $m \in \mathbf{N}^*$, $a_1, \ldots, a_m$ be integers greater or equal to 2, pairwise coprime. We denote by E the set of integers k in $\mathbf{N}^*$ which are divisible by exactly one of the a_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

(a) Compute the limit as n goes to $+\infty$, of $\dfrac{\left|E \cap [1,n]\right|}{n}$.

(b) Let ℓ be the limit as n goes to $+\infty$, of $\dfrac{\left|E \cap [1,n]\right|}{n}$. Show that $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$ and caracterize the equality case.